УДК 621.77

Михалевич В. М.
Краєвський В. О.

ФОРМУЛЮВАННЯ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ МОДЕЛІ НАКОПИЧЕННЯ ПОШКОДЖЕНЬ ПРИ ГАРЯЧОМУ ДЕФОРМУВАННІ

Експериментальні дослідження [1–4] при гарячому деформуванні констатують, що гранична до руйнування деформація, яку набуває матеріал, залежить від швидкості деформації. Якщо деформування відбувається зі сталою швидкістю, то чим вища швидкість деформації тим меншу деформацію до руйнування сприймає матеріал. У роботах [1, 2] відмічається, що при деформуванні із змінною швидкістю гранична деформація залежить від закону зміни швидкості деформації. Зокрема, навіть застосування найпростішої двоступеневої схеми може призвести як до збільшення граничної деформації, так і до її зменшення в порівнянні із деформуванням зі сталою швидкістю. Зрозуміло, що за заданий час, використовуючи різні закони зміни швидкості, матеріалу можна надати різної деформації. Задача пошуку оптимального закону зміни швидкості, при якому досягається максимальна деформація за заданий час, є актуальною. Її вирішення дозволить з найбільшим ефектом використовувати властивості матеріалу при гарячому деформуванню, що сприятиме інтенсифікації процесу, підвищенню якості виробів та зменшенню затрат енергії.

Метою даної роботи є визначення закону зміни швидкості деформації, при якому досягається максимальна накопичена деформація матеріалу за заданий час. Така задача в рамках теорії накопичення пошкоджень [1] формулюється вперше.

Основні гіпотези.

1. В початковому стані компоненти тензорів напружень і деформацій у кожній макрочастинці, а також їх похідні за координатами дорівнюють нулю, тобто початковий стан макрочастинки припускається природним.

2. Стан макрочастинки припускається однорідним у будь-який момент часу $t \in (0; t_*)$.

3. Постулюється існування скалярного параметра $\psi\left(t\right)$ з такими властивостями:

3.1. Скаляр ψ однозначно визначається процесом деформації $\dot{\varepsilon}_{ij}(t), T(t), \eta(t)$.

3.2. Скаляр ψ характеризує накопичення пошкоджень у частинці і стан, що безпосередньо передує руйнуванню макрочастинки, причому в початковий момент часу $\psi\left(0\right)=0$, а в момент повного вичерпання ресурсу пластичності $\psi\left(t_*\right)=1$.

3.3. Якщо на відрізку $\left[0;t\right]$ тензор швидкостей деформацій $\dot{\varepsilon}_{ij}$ дорівнює нулю, то також і $\psi\left(t\right)=0$.

4. Процес гарячого деформування супроводжується двома конкуруючими процесами: накопичення пошкодження внаслідок деформування та їх частковим заліковуванням. З точки зору фізики металів такий закон накопичення пошкоджень відображує фізично важливу особливість гарячої деформації: збільшення густини дислокацій під впливом зовнішніх сил провокує процес утворення енергетично більш стабільних конфігурацій, що супроводжується зменшенням густини дислокацій.

5. Гранична до руйнування деформація матеріалу при стаціонарному гарячому деформуванні є відомою функцією, що характеризує властивості матеріалу (діаграма пластичності або поверхня граничних деформацій):

$$\varepsilon_{*c} = \varepsilon_{*c}(T, \dot{\varepsilon}_u, I), \tag{1}$$

де I – сукупність безрозмірних інваріантів напружено-деформованого стану. Індекс «с» при величині ε_{*c} означає першу літеру слова «стаціонарність». Граничну деформацію в будь-якому нестаціонарному процесі будемо позначати через ε_*.

В якості безрозмірних інваріантів I будемо використовувати показник:

$$\eta = \frac{3\sigma}{\sigma_u} \tag{2}$$

і відношення третього і другого інваріантів девіатора швидкостей деформацій :

$$D = \frac{\det\left(\dot{\varepsilon}_{ij}\right)}{\sqrt{\left(\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}\right)^3}}, \tag{3}$$

де $3\sigma = \sigma_{ii}$, $\sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}$, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$, σ_{ij} – тензор напружень, δ_{ij} – символ Кронекера.

В даній роботі розглядаються лише ізотермічні процеси. Тому в подальшому властивості матеріалу при даній температурі будемо характеризувати залежністю:

$$\varepsilon_{*c} = \varepsilon_{*c}\left(\dot{\varepsilon}_u, \eta, D\right). \tag{4}$$

Оскільки при стаціонарному гарячому деформуванні накопичена деформація змінюється за законом:

$$\varepsilon_u = \dot{\varepsilon}_u \cdot t, \tag{5}$$

то діаграму пластичності (4) можна подати і так:

$$t_{*c} = \varepsilon_{*c}(\dot{\varepsilon}_u, \eta, D) / \dot{\varepsilon}_u, \tag{6}$$

де t_{*c} – час до руйнування.

Згідно сформульованих гіпотез, параметр накопичення пошкоджень у матеріалі ψ під час гарячого деформування визначається нелінійним відносно $\dot{\varepsilon}_u$ функціоналом:

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi\left(t-\tau; I(\tau)\right) \cdot f\left(\dot{\varepsilon}_u\right) \cdot d\tau, \tag{7}$$

де $\varphi(t, v)$ – ядро спадковості; t, τ – час; f – невідома функція.

Згідно даним, що наведені у [1] залежність часу деформування від швидкості деформації (6) може бути подана степеневою залежністю:

$$t_{*c} = \gamma(\eta, D)\dot{\varepsilon}_u^{\alpha(\eta, D)}, \tag{8}$$

де $a(\eta, D)$, $\gamma(\eta, D)$ – деякі функції, що характеризують властивості матеріалу при даній температурі.

Розглянемо квазілінійну модель накопичення пошкоджень у матеріалі під час гарячого деформування, яку отримаємо з (7), коли $f\left(\dot{\varepsilon}_u\right)=\dot{\varepsilon}_u$. Тоді ядро $\varphi(t,v)$ повністю визначається діаграмою пластичності (6). Із врахуванням (8) квазілінійна модель накопичення пошкоджень набуває вигляду:

$$\psi(t)=\int_0^t \frac{n(\eta(\tau),D)}{t_{*c}\left(\dot{\varepsilon}_u(\tau),\eta(\tau),D\right)}\left(\frac{t-\tau}{t_{*c}\left(\dot{\varepsilon}_u(\tau),\eta(\tau),D\right)}\right)^{n(\eta(\tau),D)-1} d\tau\,, \tag{9}$$

де $n(\eta,D)=-\dfrac{1}{\alpha(\eta,D)}$.

При відомому законі зміни швидкості деформації $\dot{\varepsilon}_u=\dot{\varepsilon}_u(t)$ накопичена деформація обчислюється за формулою:

$$\varepsilon_u(t)=\int_0^t \dot{\varepsilon}_u(\tau)\cdot d\tau\,. \tag{10}$$

Тепер ми можемо поставити таку задачу: яку максимальну накопичену деформацію може отримати матеріал за заданий час t_* і як повинна змінюватись швидкість деформування для досягнення цієї деформації. Математично, із врахуванням (7) і (10), ця задача формулюється у вигляді варіаційної задачі ізопериметричного типу: при заданому t_* знайти функцію $\dot{\varepsilon}_u=\dot{\varepsilon}_u(t)$, якій відповідає максимальне значення ε_* за додаткової умови $\psi_*=1$:

$$\begin{gathered}\varepsilon_*=\int_0^{t_*}\dot{\varepsilon}_u(\tau)\cdot d\tau\to\max,\\ \int_0^{t_*}\varphi\left(t-\tau;I(\tau)\right)\cdot f\left(\dot{\varepsilon}_u\right)\cdot d\tau=1.\end{gathered} \tag{11}$$

Розглянемо найпростішу схему зміни швидкості деформації – двоступеневу. Тоді:

$$\dot{\varepsilon}_u(t)=\begin{cases}\dot{\varepsilon}_{u1}\,, 0\le t\le t_1;\\ \dot{\varepsilon}_{u2}\,, t_1<t\le t_*,\end{cases} \tag{12}$$

де $\dot{\varepsilon}_{u1}=const$, $\dot{\varepsilon}_{u2}=const$.

Для схеми (12) із (11) отримаємо таку задачу на знаходження оптимуму:

$$\begin{gathered}\varepsilon_*=\dot{\varepsilon}_{u1}\cdot t_1+\dot{\varepsilon}_{u2}\cdot\left(t_*-t_1\right)\to\max,\\ -\left(\frac{t_*-t_1}{t_{*1}}\right)^n+\left(\frac{t_*}{t_{*1}}\right)^n+\left(\frac{t_*-t_1}{t_{*2}}\right)^n=1.\end{gathered} \tag{13}$$

У роботі [3] представлено результати досліджень при гарячому деформуванні зразків із сталі 14Х17Н2 із швидкостями деформації $\dot{\varepsilon}_{u1}=0.06c^{-1}$ і $\dot{\varepsilon}_{u2}=0.2c^{-1}$. При неперервному крученні при температурі 1150 °С для даного матеріалу отримаємо такі коефіцієнти апроксимації кривої пластичності виразом (8): $\gamma=1.3669$, $\alpha=$ -1.0978. Гранична крива, побудована у координатах $\dot{\varepsilon}_u-t_{*c}$, представлена на рис. 1.

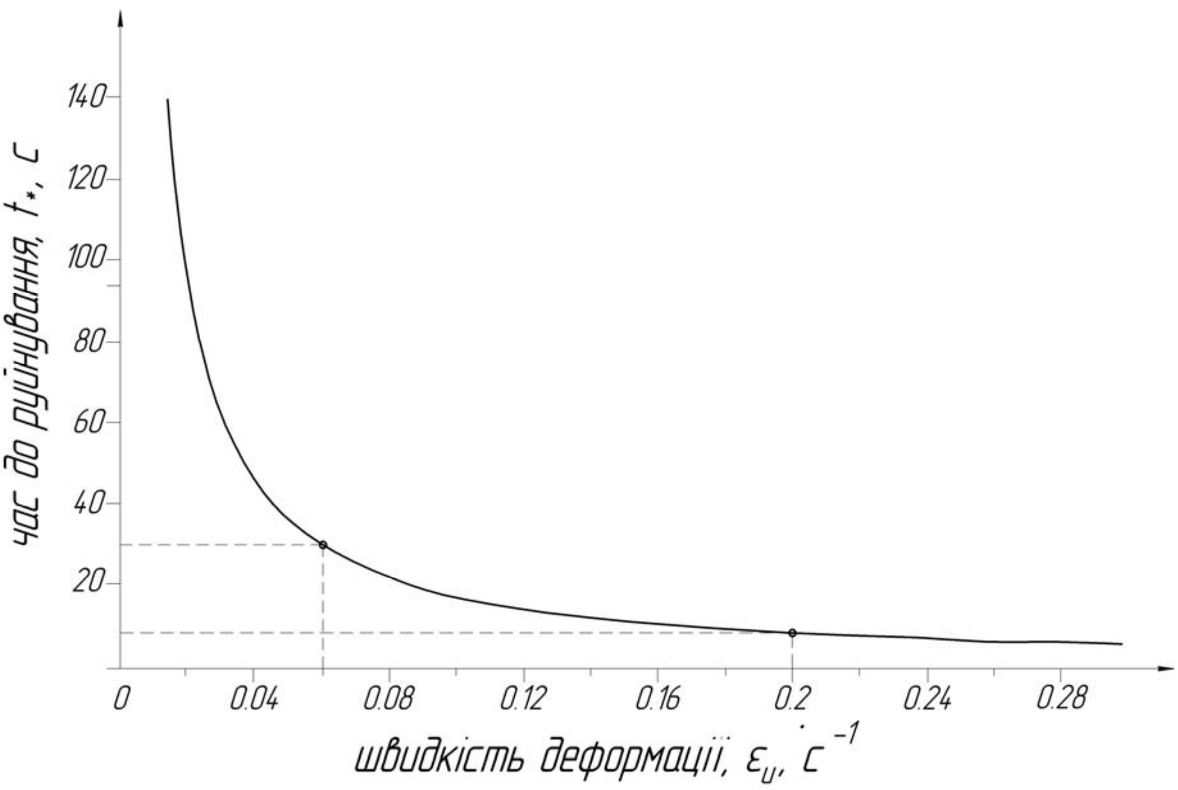

Рис. 1. Гранична крива для сталі 14Х17Н2 при температурі 1150 °С – залежність часу до руйнування від швидкості деформації при стаціонарному деформуванні

Розглянемо час $t_* = 30\ c$. При деформуванні із сталою швидкістю гранична накопичена деформація, яку набуває матеріал за цей час (швидкість деформації $\dot{\varepsilon}_u = 0.06\ c^{-1}$), дорівнює ε_{*c} = 1,8. Якщо деформування відбувається за схемою (12) із швидкостями:

$$\dot{\varepsilon}_u(t) = \begin{cases} 0.03\ c^{-1}, 0 \le t \le 15.983; \\ 0.09\ c^{-1}, 15.983 < t \le 30, \end{cases} \tag{14}$$

то за час $t_* = 30\ c$ накопичена матеріалом деформація до руйнування ε_* = 1,741. Тобто із застосуванням такої схеми деформування (двохступенева схема із збільшенням швидкості деформації) гранична деформація зменшується. За допомогою додатку Maple знайдено розв'язок нелінійної оптимізаційної задачі (13):

$$\dot{\varepsilon}_u(t) = \begin{cases} 0.2\ c^{-1}, 0 \le t \le 8; \\ 0.0143\ c^{-1}, 8 < t \le 30. \end{cases} \tag{15}$$

При такому законі зміни швидкості матеріал досягає деформації ε_* = 1,9145 (рис. 2). Тобто навіть із застосуванням найпростішої схеми нестаціонарного деформування – двоступеневої, вдалось збільшити накопичену до руйнування деформацію у порівнянні із стаціонарним процесом на 6,36 %. Очевидно, що цей результат можна покращити, якщо застосувати більш складну схему зміни швидкості деформації. Отже, розв'язок варіаційної задачі (11) належить класу нестаціонарного деформування, і знаходження цього розв'язку в загальному вигляді є актуальною задачею.

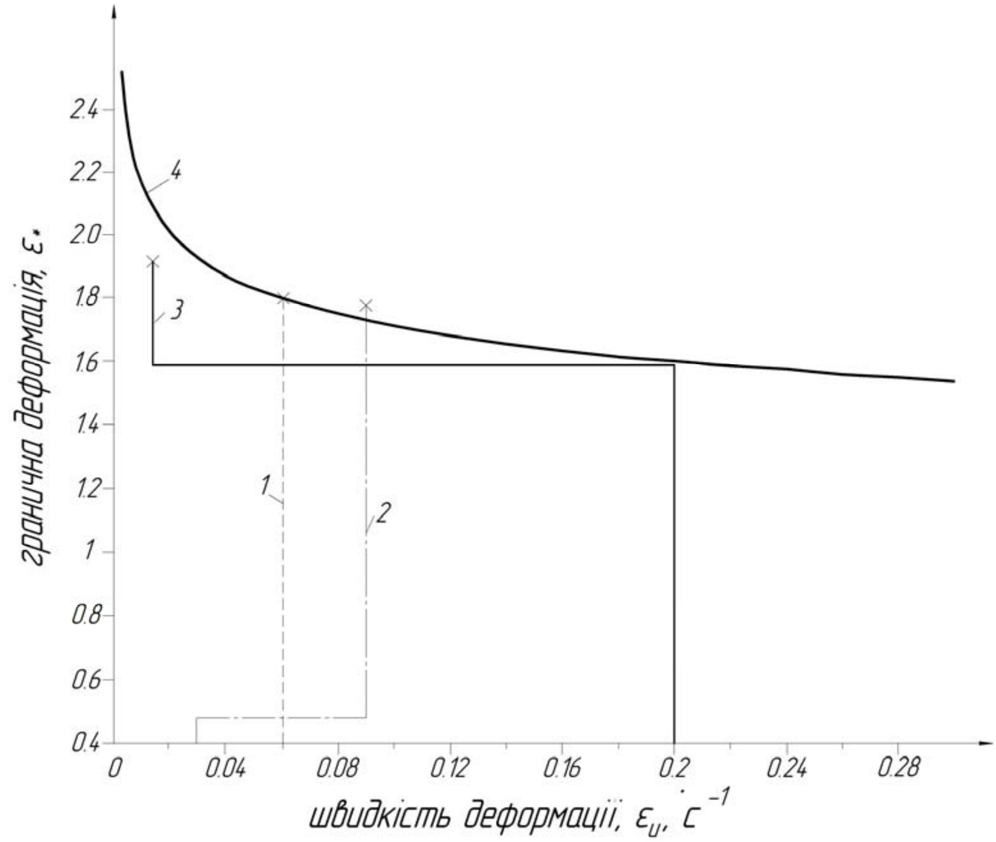

Рис. 2. Гранична деформація при різних швидкостях деформації:

1 – гаряче деформування із сталою швидкістю; 2 – двоступеневе деформування із збільшенням швидкості; 3 – оптимальне розподілення швидкості; 4 – гранична крива

ВИСНОВКИ

У роботі на основі скалярної моделі накопичення пошкоджень при гарячому деформуванні сформульовано варіаційну задачу для знаходження закону зміни швидкості деформації, при якому досягається максимальна накопичена деформація за заданий час. Знайдено її розв'язок для випадку двоступеневого гарячого деформування. На основі цього зроблено висновок, що розв'язок даної варіаційної задачі належить класу нестаціонарного деформування.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Михалевич В. М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень / В. М. Михалевич. – Вінниця : УНІВЕРСУМ – Вінниця, 1998. – 195 с.*

2. *Кривые текучести и пластичности стали ШХ15 при двукратном нагружении / А. М. Галкин, П. И. Полухин, С. П. Ефименко, В. Л. Пилюшенко // Изв. АН СССР. Металлы. – 1984. – № 6. – С. 185–188.*

3. *Влияние горячей прерывистой деформации на пластичность металла / А. А. Богатов, М. В. Смирнов, В. А. Криницын и др. // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1981. – № 12. – С. 37–40.*

4. *Перетятько В. Н. Пластичность металла при горячей деформации / В. Н. Перетятько // В сб. Обработка металлов давлением. – Свердловск, 1982. – С. 54–58.*

Михалевич В. М. – д-р техн. наук, проф. ВНТУ;
Краєвський В. О. – канд. техн. наук, доц. ВНТУ.

ВНТУ – Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

E-mail: vkraevsky@mail.ru